

数学I・Aの重要公式

■ 方程式と不等式

□

▶ 1: 指数法則 a, b を実数, m, n を自然数とする.

$$\begin{aligned} & \bullet a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ 個}} & \bullet a^1 = a & \bullet a^0 = 1 \\ & \bullet a^m a^n = a^{m+n} & \bullet (a^m)^n = a^{mn} & \bullet (ab)^n = a^n b^n \end{aligned}$$

▶ 2: 展開・因数分解の公式

$$\begin{aligned} & \bullet (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 & \bullet (a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \\ & \bullet (ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd \rightarrow \text{たすき掛け} \\ & \bullet (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3 & \begin{array}{ccc} a & b & \rightarrow bc \\ c & d & \rightarrow ad \\ \hline ac & bd & ad+bc \end{array} \\ & \bullet (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \\ & \bullet (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \\ & \bullet (a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2) = a^4 + a^2b^2 + b^4 \\ & \bullet (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \end{aligned}$$

▶ 3: 有名な恒等式

$$\begin{aligned} & \bullet a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab & \bullet (a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab \\ & \bullet a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) \\ & \bullet a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} \\ & \bullet (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc = (a+b)(b+c)(c+a) \\ & \bullet a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a) \\ & \hspace{10em} = -(a-b)(b-c)(c-a) \\ & \bullet a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \\ & \bullet a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)^3 - 3(a+b+c)(ab+bc+ca) + 3abc \end{aligned}$$

▶ 4: 絶対値 a は実数とする.

$$\bullet |a| = \begin{cases} a & (a \geq 0 \text{ のとき}) \\ -a & (a < 0 \text{ のとき}) \end{cases} \quad \bullet \sqrt{a^2} = |a|$$

▶ 5: 2重根号 $p = a+b, q = ab$ ($a \geq b > 0$) のとき,

$$\sqrt{p \pm 2\sqrt{q}} = \sqrt{a \pm 2\sqrt{ab} + b} = \sqrt{(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$$

▶ 6: 解の公式 2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ ($ax^2 + 2b'x + c = 0$) の解は,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a})$$

▶ 7: 判別式 2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0 \cdots (*)$ に対し, $D = b^2 - 4ac$ とおく.

- $D > 0 \iff (*)$ が異なる2つの実数解をもつ
- $D = 0 \iff (*)$ が実数の重解をもつ
- $D < 0 \iff (*)$ が実数解をもたない

■ 2次関数

□

▶ 8: 点・グラフの移動 p, q を実数, k, l を正数とする.

- xy 平面において, 点 (a, b) , 関数 $y = f(x)$ のグラフを,
- x 軸方向に p, y 軸方向に q だけ平行移動 $\rightarrow (a+p, b+q), y-q = f(x-p)$
- x 軸に関して対称移動 $\rightarrow (a, -b), -y = f(x)$
- y 軸に関して対称移動 $\rightarrow (-a, b), y = f(-x)$
- 原点に関して対称移動 $\rightarrow (-a, -b), -y = f(-x)$
- x 軸方向に k 倍, y 軸方向に l 倍に拡大 $\rightarrow (ka, lb), \frac{y}{l} = f(\frac{x}{k})$

▶ 9: 2次関数のグラフ $a \neq 0$ とする.

- 2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフは放物線となり, $a > 0$ ならば下に凸, $a < 0$ ならば上に凸となる.
- 2次関数 $y = a(x-p)^2 + q$ のグラフは, $y = ax^2$ のグラフを x 軸方向に p, y 軸方向に q だけ平行移動した放物線であり, 頂点は (p, q) , 軸の方程式は $x = p$ となる.
- 2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ について, 右辺を平方完成すると,

$$y = a\left\{x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right\}^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$
 より, 頂点は $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$, 軸の方程式は $x = -\frac{b}{2a}$ となる.

▶ 10: 判別式 2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ に対し, $D = b^2 - 4ac$ とおく.

- $D > 0$ のとき, $y = ax^2 + bx + c$ のグラフは x 軸と異なる2交点をもつ.
- $D = 0$ のとき, $y = ax^2 + bx + c$ のグラフは x 軸と頂点で接する.
- $D < 0$ のとき, $y = ax^2 + bx + c$ のグラフは x 軸と共有点をもたない.

▶ 11: 2次不等式 $a > 0$ とし, $y = ax^2 + bx + c, D = b^2 - 4ac$ とする.

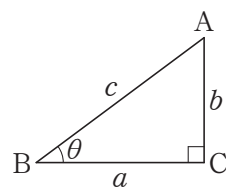
- $D > 0$ のとき, 方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解を α, β ($\alpha < \beta$) とする.
 $y \geq 0$ の解は「 $x \leq \alpha, \beta \leq x$ 」
 $y > 0$ の解は「 $x < \alpha, \beta < x$ 」
- $D = 0$ のとき, $y = a(x-\alpha)^2$ とする.
 $y \geq 0$ の解は「すべての実数」
 $y > 0$ の解は「 α 以外のすべての実数」
- $D < 0$ のとき,
 $y \geq 0$ の解は「すべての実数」
 $y > 0$ の解は「すべての実数」

■ 図形と計量

□

▶ 12: 三角比の定義 右図の直角三角形 ABC において,

$$\bullet \sin \theta = \frac{b}{c} \quad \bullet \cos \theta = \frac{a}{c} \quad \bullet \tan \theta = \frac{b}{a}$$



▶ 13: 三角比の相互関係

$$\bullet \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad \bullet \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\bullet 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

▶ 14: 三角比の値

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

▶ 15: $180^\circ - \theta, 90^\circ \pm \theta$ の公式

- $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta, \cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta, \tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta$
- $\sin(90^\circ \pm \theta) = \cos \theta, \cos(90^\circ \pm \theta) = \mp \sin \theta, \tan(90^\circ \pm \theta) = \mp \frac{1}{\tan \theta}$

▶ 16: 直線の傾き

直線 $y = mx + n$ と x 軸の正方向とのなす角を θ とすると, $m = \tan \theta$

▶ 注 $\triangle ABC$ において, $AB = c, BC = a, CA = b$ とし, 外接円の半径を R , 内接円の半径を r , 面積を S とする.

▶ 17: 正弦定理 $2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

▶ 18: 余弦定理

$$\begin{aligned} & \bullet a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A & \bullet \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ & \bullet b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B & \bullet \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \\ & \bullet c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C & \bullet \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{aligned}$$

▶ 19: 面積・内接円

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}r(a+b+c)$$

▶ 20: ヘロンの公式 $2s = a + b + c$ とする.

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

▶ 21: 球の表面積・体積 半径 r の球の表面積 S と体積 V は,

$$S = 4\pi r^2, \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

▶ 22: 相似比と面積比・体積比 相似比が $m:n$ のとき,

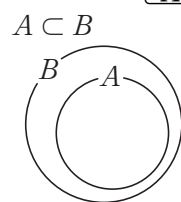
- 面積比は $m^2:n^2$
- 体積比は $m^3:n^3$

■ 集合

□

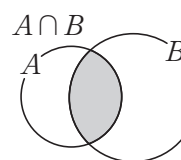
▶ 23: 集合の記号 A, B を集合とする.

- $a \in A \cdots a$ は A の要素, $b \notin A \cdots b$ は A の要素ではない
- $A \subset B \cdots A$ は B の部分集合 \iff 「 $x \in A$ ならば $x \in B$ 」
- $A = B \cdots A$ と B は等しい \iff 「 $A \subset B$ かつ $B \subset A$ 」
- A は B の真部分集合 \iff 「 $A \subset B$ かつ $A \neq B$ 」
- 空集合 $\phi \cdots$ 要素をもたない集合



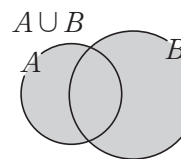
空集合は任意の集合の部分集合となる.

- $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\} \cdots A$ と B の共通部分
- $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\} \cdots A$ と B の和集合



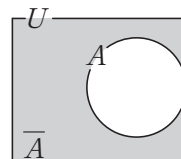
▶ 24: 集合の演算 A, B, C を集合とする.

- 交換法則 $\cdots A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$
- 結合法則 $\cdots (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C,$
 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$
- 分配法則 $\cdots A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$



▶ 25: 補集合の性質 U を全体集合, A, B, C を U の部分集合とする.

- $\bar{A} = \{x \mid x \in U \text{ かつ } x \notin A\} \cdots A$ の補集合
- $(\bar{A}) = A \quad \bullet A \cap \bar{A} = \phi \quad \bullet A \cup \bar{A} = U$
- $A \subset B \iff \bar{B} \subset \bar{A}$
- $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}, \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ (ド・モルガンの法則)
- $\overline{A \cap B \cap C} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}, \overline{A \cup B \cup C} = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$



▶ 26: 要素の個数 有限集合 A の要素の個数を $n(A)$ で表す.

- A が有限集合 U の部分集合のとき, $n(\bar{A}) = n(U) - n(A)$
- A, B, C が有限集合のとき, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B),$
 $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C)$

$$-n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$$

▶ 27: 部分集合の総数 有限集合 A に対し, A の部分集合は, A 自身と空集合を含めて, 全部で $2^{n(A)}$ 個ある.

数学I・Aの重要公式

■ 場合の数と確率

[A]

▶28: 基本法則

- 和の法則 … 事柄 A, B の起こり方が、それぞれ a, b 通りで、A と B が同時に起こらないとき、A または B のどちらかが起こる場合の数は $a + b$ 通りである。
- 積の法則 … 事柄 A の起こり方が a 通りで、そのおのおのに対して事柄 B の起こり方が b 通りあるとすると、A と B がともに起こる場合の数は ab 通りである。

▶29: 階乗 自然数 n に対して、 $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ 。ただし、 $0! = 1$ とする。

▶30: 順列 n 個の異なるものから r 個をとって並べた順列の総数は、

$${}_n P_r = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

▶31: 重複順列 n 個の異なるものから r 個を重複を許してとって並べた重複順列の総数は、 ${}_n \Pi_r = n^r$

▶32: 同じものを含む順列 n 個のものうち、 p 個が同じもの、 q 個が別の同じもの、 r 個がまた別の同じもの、…… であるとき ($n = p + q + r + \dots$)、これら n 個のもの全部を1列に並べる順列の総数は、 $\frac{n!}{p!q!r!\dots}$

▶33: 円順列 n 個の異なるものを円形に並べた円順列の総数は、 $(n-1)!$

▶34: じゅず順列 n 個の異なるものでじゅずを作る作り方の総数は、 $\frac{(n-1)!}{2}$

▶35: 組合せ n 個の異なるものから、順序を問題にしないで、 r 個をとって組を作る組合せの総数は、 ${}_n C_r = \frac{{}_n P_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

▶36: 重複組合せ n 個の異なるものから、重複を許して r 個をとって組を作る組合せの総数は、 ${}_n H_r = {}_{n+r-1} C_r$

▶37: 二項定理

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^n {}_n C_r a^{n-r} b^r = a^n + n a^{n-1} b + \dots + {}_n C_r a^{n-r} b^r + \dots + b^n$$

▶38: 多項定理 $(a+b+c+\dots)^n$ の展開式の一般項は、

$$\frac{n!}{p!q!r!\dots} a^p b^q c^r \dots \quad (\text{但し、} p+q+r+\dots=n)$$

▶39: 確率 ある試行を行なうとき、起こりうるすべての場合の数が n 通りあり、これらは同様に確からしいとする。この試行を行なうとき事象 A が起こる場合の数が a 通りであるとき、事象 A の起こる確率 $P(A)$ は、

$$P(A) = \frac{a}{n} = \frac{\text{事象 A の起こる場合の数}}{\text{起こりうるすべての場合の数}}$$

▶40: 独立試行 2つの試行について、それらの結果が互いに影響し合わないとき、それらの試行は独立であるという。独立な試行 T, S を行なうとき、T については事象 A が起こり、S については事象 B が起こる確率 $P(A \cap B)$ は、

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

▶41: 反復試行の確率 ある試行 T を行なうとき、事象 A が起こる確率が p であるとする。試行 T を n 回くり返すとき、事象 A が r 回だけ起こる確率は、 ${}_n C_r p^r (1-p)^{n-r}$ ($0 \leq r \leq n$)

▶42: 期待値 試行 T を行なうとき、変数 X が n 個の値 x_1, x_2, \dots, x_n をとり、それぞれの値をとる確率が p_1, p_2, \dots, p_n であるとする。このとき、X の期待値 $E(X)$ は、

$$E(X) = \sum_{k=1}^n x_k p_k = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

■ 論理

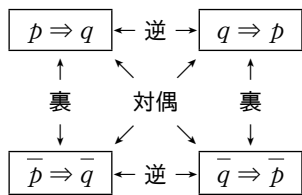
[A]

▶43: 必要条件・十分条件 p, q を条件とする。

- 「 $p \Rightarrow q$ 」が真であるとき、 q は p であるための必要条件
 p は q であるための十分条件という。
- 「 $p \Rightarrow q$ 」と「 $q \Rightarrow p$ 」がともに真であるとき、 p は q であるための必要十分条件であるといい、「 $p \Leftrightarrow q$ 」と表す。

▶44: 逆・裏・対偶 p, q を条件とする。 p の否定を \bar{p} と表す。

命題「 $p \Rightarrow q$ 」に対し、
「 $q \Rightarrow p$ 」をもとの命題の逆、
「 $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$ 」をもとの命題の裏、
「 $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ 」をもとの命題の対偶という。
一般に、命題とその対偶の真偽は一致する。



▶45: 否定 p, q を条件とする。

- 「 p かつ q 」の否定 \rightarrow 「 \bar{p} または \bar{q} 」
- 「 p または q 」の否定 \rightarrow 「 \bar{p} かつ \bar{q} 」
- 「すべての x に対し p である」の否定 \rightarrow 「 \bar{p} を満たす x が存在する」
- 「 p を満たす x が存在する」の否定 \rightarrow 「すべての x に対し \bar{p} である」

▶46: 真理集合 全体集合 U に属する x に関する条件 $p(x)$ に対し、 $p(x)$ が真となるような $x \in U$ 全体の集合を $p(x)$ の真理集合という。

- 条件 p, q の真理集合をそれぞれ P, Q とする。
- 「 $p \Rightarrow q$ が真」 \Leftrightarrow 「 $P \subset Q$ 」
- 否定 \bar{p} の真理集合は補集合 \bar{P}
- 「 p かつ q 」の真理集合は $P \cap Q$
- 「 p または q 」の真理集合は $P \cup Q$

▶47: いろいろな証明

- 背理法 … 「 $p \Rightarrow q$ 」を証明するのに、「 p かつ \bar{q} 」と仮定して矛盾を導くことにより、「 $p \Rightarrow q$ 」を証明する方法
- 対偶法 … 「 $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ 」を示すことにより、「 $p \Rightarrow q$ 」を証明する方法

■ 平面図形

[A]

▶48: 三角形の辺と角 $\triangle ABC$ において、 $AB > AC \Leftrightarrow \angle ABC < \angle ACB$

▶49: 三角形の成立条件 a, b, c を正数とする。

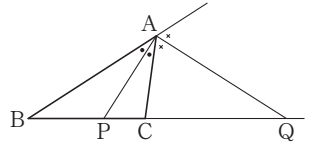
- 「 a, b, c を3辺の長さにもつ三角形が存在する」
 \Leftrightarrow 「 $a < b + c$ かつ $b < c + a$ かつ $c < a + b$ 」 \Leftrightarrow 「 $|b - c| < a < b + c$ 」

▶50: 中線定理 $\triangle ABC$ において、辺 BC の中点を M とするとき、

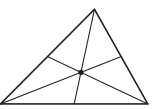
$$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$$

▶51: 角の二等分線と辺の比 $\triangle ABC$ において、 $\angle A$ の二等分線と辺 BC との交点を P、 $\angle A$ の外角の二等分線と辺 BC の延長との交点を Q とするとき、

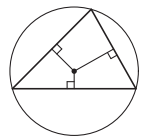
$$AB : AC = BP : PC = BQ : QC$$



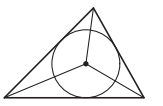
▶52: 三角形の重心 三角形の各頂点と対辺の中点を結ぶ線分を中線という。三角形の3つの中線は1点で交わる。その交点を三角形の重心という。重心は3つの中線をそれぞれ2:1に内分する。



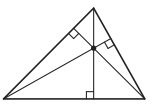
▶53: 三角形の外心 三角形の3辺の垂直二等分線は1点で交わる。その交点を三角形の外心という。外心は、三角形の3頂点から等距離にあり、三角形の外接円の中心となる。



▶54: 三角形の内心 三角形の3つの内角の二等分線は1点で交わる。その交点を三角形の内心という。内心は、三角形の各辺から等距離にあり、三角形の内接円の中心となる。

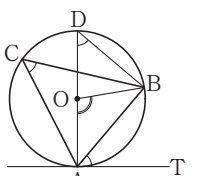


▶55: 三角形の垂心 三角形の各頂点から対辺へ引いた3つの垂線は1点で交わる。その交点を三角形の垂心という。

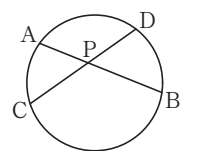


▶56: 円周角の定理・接弦定理 $\triangle ABC$ の外接円を円 O、頂点 A における円 O の接線を AT とする。

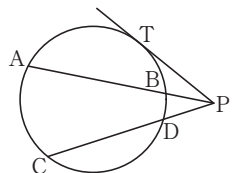
- $\angle ACB = \angle ADB = \frac{1}{2} \angle AOB$
- $\angle BAT = 90^\circ - \angle BAD = \angle ADB = \angle ACB$



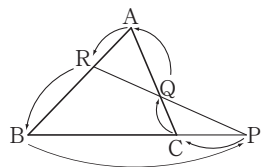
▶57: 方べきの定理(1) 2つの弦 AB, CD が円の内部の点 P で交わるとき、 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$



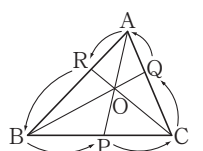
▶58: 方べきの定理(2) 2つの弦 AB, CD および円周上の点 T における接線が円の外部の点 P で交わるとき、 $PA \cdot PB = PC \cdot PD = PT^2$



▶59: メネラウスの定理 $\triangle ABC$ とその頂点は通らない直線が与えられたとする。直線と3辺 BC, CA, AB またはその延長との交点をそれぞれ P, Q, R とするとき、 $\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$



▶60: チェバの定理 $\triangle ABC$ の3辺およびその延長上にない点 O が与えられたとする。3頂点 A, B, C と点 O を通る直線と対辺またはその延長との交点をそれぞれ P, Q, R とするとき、 $\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$



▶61: トレミーの定理 四角形 ABCD が円に内接するとき、 $AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$

■ 整数

▶62: 倍数の判定法

- 2の倍数 …… 1の位が偶数
- 3の倍数 …… 各位の数の和が3の倍数
- 4の倍数 …… 下2桁が4の倍数
- 5の倍数 …… 1の位が0か5
- 9の倍数 …… 各位の数の和が9の倍数

▶63: 約数 自然数 N (≥ 2) が、 $N = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_n^{e_n}$ と素因数分解されるとき、 N の正の約数の総数は、 $(e_1 + 1)(e_2 + 1) \dots (e_n + 1)$

- N の正の約数の総和は、 $(1 + p_1 + p_1^2 + \dots + p_1^{e_1})(1 + p_2 + p_2^2 + \dots + p_2^{e_2}) \dots (1 + p_n + p_n^2 + \dots + p_n^{e_n})$

▶64: 2つの自然数 a, b の最大公約数を g 、最小公倍数を l とする。

- $a = a'g, b = b'g$ とすると、 a', b' は互いに素である。
- $l = a'b'g, ab = gl$ が成り立つ。